Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ____________________

Carné: __________ Sección: _____

Matemáticas VII (MA-3111) Intensivo 2015 1er. Examen Parcial (40 %)

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE; $a, \omega \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$u(x)$	$U(z)$
$u'_{\text{gen}}(x)$	$zU(z)$
$xu(x)$	$-U'(z)$
$u(x-a)$	$U(z)e^{-az}$
$e^{\alpha x}u(x)$	$U(z-\alpha)$
$\alpha u(x)+\beta v(x)$	$\alpha U(z)+\beta V(z)$
$u * v(x)$	$U(z)V(z)$

$u(x)$	$U(z)$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(k)}(x)$	z^k
$H(x)$	$\frac{1}{z}$
$H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{z^k}$

$u(x)$	$U(z)$
$H(x)\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$
$H(x)\cos(\omega x)$	$\frac{z}{z^2+\omega^2}$
$H(x)\sinh(\omega x)$	$\frac{\omega}{z^2-\omega^2}$
$H(x)\cosh(\omega x)$	$\frac{z}{z^2-\omega^2}$

1. (2 puntos) **Verdadero o falso:** en cada caso diga si la afirmación es verdadera o falsa

(a) Si $\phi \in \mathcal{D}$ y p es un polinomio, $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)\phi(x) = 0$ .... (V)

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ tiene soporte compacto, y por tanto $p(x)\varphi(x)$ también y $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)\varphi(x) = 0$. La afirmación es verdadera.

(b) Si $f(x)$ define una distribución regular, $f'_{gen}(x)$ también es regular .... (F)

Falso, por ejemplo $H(x)$ es regular y $H'_{gen}(x) = \delta(x)$ es singular

(c) Si g es suave, $g'(x)\delta(x) = -g(0)\delta'(x)$ .... (F)

Falso. Sabemos que $g'(x)\delta(x) = g'(0)\delta(x)$.

(d) Cualquier distribución en $\mathcal{D}'$, es una distribución en $(\mathcal{C}^\infty)'$ .... (F)

Falso. Las distribuciones en $(\mathcal{C}^\infty)'$ son de soporte compacto, y no toda distribución en $\mathcal{D}$ tiene soporte compacto.

(e) La función $f(x) = \cosh(x)$ define una distribución regular en $\mathcal{S}'$ .... (F)

Falso. El $\cosh(x)$ no es moderada. Si $x \to +\infty$, $\cosh(x) \approx e^x$.

(f) $\delta(x)$ es una función tal que $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$, y $\delta(x) = +\infty$ si $x = 0$ . . . . (F)

La delta no es una función, es una distribución o función generalizada singular.

(g) La distribución $\delta'(x)$ es impar . . . . (V)

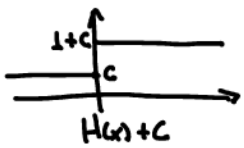
Verdadero. Sabemos que la delta es par y por tanto su derivada es impar.

$$\langle \delta'(-x) | \varphi(x) \rangle = \left\langle \delta'(x) \middle| \frac{1}{|-1|} \varphi\left(\frac{x}{-1}\right) \right\rangle = \langle \delta'(x) | \varphi(-x) \rangle = -\varphi'(0)(-1) = \varphi'(0) = \langle -\delta'(x) | \varphi(x) \rangle$$

$\Rightarrow \boxed{\delta'(-x) = -\delta'(x)}$ Es impar

(h) $H(x)$ es la única distribución regular tal que $H'_{gen}(x) = \delta(x)$ . . . . (F)

Falso. $H(x)+C$ también satisface $(H(x)+C)'_{gen} = \delta(x)$



(i) Una condición necesaria para que exista la convolución de dos distribuciones es que ambas tengan soporte compacto . . . . (F)

Falso. Basta con que una de las dos tenga soporte compacto, no necesariamente las dos.

(j) Si $\phi(x) \in \mathcal{S}$, entonces $p(x)\phi(x) \in \mathcal{S}$, para cualquier polinomio $p(x)$ . . . . (V)

Verdadero. P y φ son suaves y por tanto $p \cdot \varphi$ es suave. Como $\varphi \in S$, φ decrece rápidamente y por tanto $p \cdot \varphi$ también pues p es un polinomio.

(k) El pulso rectangular es suave y de soporte compacto . . . . (F)

Falso. No es suave.

(l) Una solución fundamental del operador $L = 2D$ es $2\delta(x)$ . . . . (F)

Falso. $L(2\delta(x)) = 4\delta'(x) \neq \delta(x)$.

2. (2,5 puntos) **Pareo:** una con una línea recta las expresiones que sean iguales

$e^{-x^2}\delta(x)$	$g(x)$
$\mathfrak{L}(g(x-y)\delta(y))$	$\delta(x)$
$g'(x)\delta(x)$	$-g'''(0)\delta(x)$
$\delta(x) * g(x)$	$g(x)$
$g(x)\delta'''(x)$	$g'(0)\delta(x)$

- $e^{-x^2}\delta(x) = e^0\delta(x) = \delta(x)$
- $g(x-y)\delta(y) = g(x)\delta(y) \xmapsto{\mathcal{L}} g(x)$ (y es la variable, x es constante y $g(x)$ también)
- $g'(x)\delta(x) = g'(0)\delta(x)$
- $\delta(x) * g(x) = g(x)$
- $g(x)\delta'''(x) \neq -g'''(0)\delta(x)$

3. (5,5 puntos) **Teoría:** demuestre la siguiente propiedad sobre la transformada de Laplace en el sentido distribucional: $\mathfrak{L}(F * G) = \mathfrak{L}(F)\mathfrak{L}(G)$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$:

$\mathcal{L}(F*G)(z) = \langle (F*G)(x) \mid e^{-zx} \rangle$ (Por definición de T.L. distribucional)

$= \langle F(x) \mid \langle G(y) \mid e^{-z(x+y)} \rangle\rangle$ (Por definición de convolución distribucional)

$= \langle F(x) \mid e^{-zx} \langle G(y) \mid e^{-zy} \rangle\rangle$ (Propiedad de la exponencial y linealidad)

$= \langle F(x) \mid e^{-zx} \rangle \, \mathcal{L}(G)(z)$ (Por definición de T.L. y linealidad)

$= \mathcal{L}(F)(z)\,\mathcal{L}(G)(z)$ ■ (Por definición de T.L.)

4. (20 puntos) **Cálculo:**

(a) (4 puntos) Calcule la solcución fundamental general de $L = 2D^2 - Id$.

Sea $G(x) = g(x)H(x)$ tal que $L_x G(x) = \delta(x)$ (El propagador Causal)

$\xmapsto{\mathcal{L}} (2z^2-1)\mathcal{L}(G) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(G)(z) = \frac{1}{2z^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{z^2-(1/\sqrt{2})^2}$

$\xmapsto{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{G(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{senh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)H(x)}$ Es una solución particular.

Sea $Ly(x) = 0 \Rightarrow 2y''(x) - y(x) = 0$ el polinomio característico es $p(\lambda) = 2\lambda^2 - 1 = 0$ si $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. La solución general de la ecuación homogénea es $G_h(x) = Ae^{x/\sqrt{2}} + Be^{-x/\sqrt{2}}$

Así $\boxed{G_g(x) = Ae^{x/\sqrt{2}} + Be^{-x/\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{senh}(x/\sqrt{2})H(x)}$

(b) (4 puntos) Calcule la convolución $u(x) = H(x+1) * 1_{[-2,2]}(x) * \sin(x) * \delta'(x-1)$.

$u(x) = \delta(x+1) * 1_{[-2,2]}(x) * \operatorname{sen}(x) * \delta(x-1) = \delta(x) * 1_{[-2,2]}(x) * \operatorname{sen}(x) * \delta(x) = 1_{[-2,2]}(x) * \operatorname{sen}(x)$

$= \operatorname{sen}(x) * 1_{[-2,2]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x-y) 1_{[-2,2]}(y)\,dy = \int_{-2}^{2} \operatorname{sen}(x-y)\,dy = \cos(x-y)\Big|_{y=-2}^{y=2}$

$\Rightarrow \boxed{u(x) = \cos(x-2) - \cos(x+2)}$

(c) (4 puntos) Calcule la transformada de Laplace inversa de $F(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 3}{z^2(1-z)}$.

$$F(z) = \frac{Az+B}{z^2} + \frac{C}{1-z} = \frac{(Az+B)(z-1) + z^2 C}{z^2(1-z)}$$

$$\Rightarrow z^2 - 3z + 3 = (Az+B)(1-z) + z^2 C$$

$\underline{z=1}$: $\boxed{C=1}$ $\underline{z=0}$: $\boxed{B=3}$

$\left.\frac{d\ldots}{dz}\right|_{z=0}$: $-3 = A - B \Rightarrow \boxed{A=0}$

$$F(z) = \frac{3}{z^2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(x) = 3xH(x) - e^x H(x)$$

$$\boxed{f(x) = (3x - e^x)H(x)}$$

(d) (4 puntos) Calcule la integral $\int_0^\infty x^{2015} e^{-2x}\, dx$.

$$\int_0^\infty x^{2015} e^{-2x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2015} H(x) e^{-2x} dx = \langle x^{2015} H(x) \mid e^{-2x} \rangle$$

$$= \mathcal{L}(x^{2015} H(x))(2) \quad , \text{ como } \mathcal{L}(x^{2015} H(x))(z) = \frac{(2015)!}{z^{2016}}$$

$$= \boxed{\frac{(2015)!}{2^{2016}}}$$

(e) (4 puntos) Calcule $d - \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \delta'(nx)$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle n^2 \delta'(nx) | \varphi(x) \rangle = \lim_{n\to\infty} \left(n^2 \langle \delta'(x) | \tfrac{1}{n} \varphi(\tfrac{x}{n}) \rangle \right) = \lim_{n\to\infty} \left(n \langle \delta'(x) | \varphi(\tfrac{x}{n}) \rangle \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-n \langle \delta(x) | \varphi'(\tfrac{x}{n}) \tfrac{1}{n} \rangle \right) = \lim_{n\to\infty} (-\varphi'(0)) = -\varphi'(0) = \langle \delta'(x) | \varphi(x) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{d\text{-}\lim_{n\to\infty} n^2 \delta'(nx) = \delta'(x)}$$

5. (10 puntos) Halle una función suave $y(x)$ tal que: $(x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = -1$, y $y'(0) = 2$.

sea $\boxed{u(x) = y(x)H(x)}$, entonces $u'_{\mathcal{D}}(x) = y'(x)H(x) + y(x)\delta(x) = y'(x)H(x) + y(0)\delta(x)$

$\Rightarrow \boxed{u'_{\mathcal{D}}(x) = y'(x)H(x) - \delta(x)}$. $u''_{\mathcal{D}}(x) = y''(x)H(x) + y'(x)\delta(x) - \delta'(x) = y''(x)H(x) + y'(0)\delta(x) - \delta'(x)$

$\Rightarrow \boxed{u''_{\mathcal{D}}(x) = y''(x)H(x) + 2\delta(x) - \delta'(x)}$

Con $L = (x-1)D^2 - xD + Id$, obtenemos la ecuación causal:

$$L_{gu}u(x) = 2(x-1)\delta(x) - (x-1)\delta'(x) - x\delta(x) = -2\delta(x) + \delta'(x) + \delta(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-1)u''_{gu}(x) - x\,u'_{g}(x) + u(x) = \delta'(x) - \delta(x)} \quad \text{(Ec. causal)}$$

Aplicamos T.L.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} -\left(z^2 U(z)\right)' - z^2 U(z) + \left(z U(z)\right)' + U(z) = z - 1$$

$$\Rightarrow -2z\,U(z) - z^2 U'(z) - z^2 U(z) + U(z) + z U'(z) + U(z) = z - 1$$

$$\Rightarrow (z - z^2) U'(z) + (2 - 2z - z^2) U(z) = z - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{U'(z) + \frac{z^2 + 2z - 2}{z^2 - z} U(z) = \frac{-1}{z}} \quad \text{(Ec. lineal de 1}^{\text{er.}}\text{ Orden)}$$

Factor integrante: $\mu(z) = e^{\int \frac{z^2+2z-2}{z^2-z} dz} = e^{\int 1 + \frac{3z-2}{z(z-1)} dz} = e^{\int 1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} dz}$

$$= e^{\int 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z-1} dz} = e^{z + \log(z^2) + \log(z-1)}$$

$A(z-1) + Bz = 3z - 2$

$\boxed{B=1}$, $\boxed{A=2}$

$$\boxed{\mu(z) = z^2 (z-1) e^z}$$

$$\Rightarrow \left(\mu(z) U(z)\right)' = -z(z-1)e^z \Rightarrow \mu(z) U(z) = \int (z - z^2) e^z dz = (z - z^2) e^z - \int (1 - 2z) e^z dz$$

$$= (z - z^2) e^z - (1 - 2z) e^z - \int 2 e^z dz$$

$$= (z - z^2 - 1 + 2z - 2) e^z + C$$

$$\Rightarrow U(z) = \frac{z^2 - 3z + 3}{z^2(1-z)} + \frac{C}{z^2(z-1)} e^{-z}, \quad \text{si} \quad \frac{c}{z^2(z-1)} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} k(x)H(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(x) = (3x - e^x)H(x) + C\,k(x-1)H(x-1) \Rightarrow C = 0 \text{ pues } u(x) = y(x)H(x)$$

$$\Rightarrow u(x) = (3x - e^x)H(x)$$

y así $\boxed{y(x) = 3x - e^x}$ ¡es la solución!

¡Justifique Todas Sus Respuestas!
Respuesta sin justificación carecerá de valor.